

Time : 3 Hrs.

II Sem -G
Engg. Math.-II

Full Marks : 80

Pass Marks : 26

Answer **all 20** questions from **Group A** (each of **1 mark**).

ग्रुप-A के सभी 20 प्रश्नों के उत्तर दें। (प्रत्येक के 1 अंक हैं।)

Group-B consists of 10 questions out of which **five** questions are to be answered (each of **4 marks**).

ग्रुप-B में 10 प्रश्न हैं जिनमें से **किन्हीं पाँच** प्रश्नों के उत्तर दें।
(प्रत्येक के 4 अंक हैं।)

Group-C consists of four parts I, II, III & IV. Answer **any five** questions selecting at least one question from each part. (Each of **8 marks**).

ग्रुप-C में चार पार्ट I, II, III एवं IV हैं। प्रत्येक पार्ट से कम से कम एक प्रश्न चुनते हुए **किन्हीं पाँच** प्रश्नों के उत्तर दें। (प्रत्येक के 8 अंक हैं।)

All parts of question of one Group must be answered at one place in sequence, otherwise they may not be evaluated.

एक ग्रुप के सभी प्रश्न एवं उनके अंशों का उत्तर एक ही जगह (लगातार क्रम में) होना चाहिए। अन्यथा, वे नहीं जाँचे जा सकते हैं।

The figures in right hand margin indicate full marks.

पार्श्व के अंक पूर्णांक के सूचक हैं।

GROUP-A

1. Select the most suitable answer from the given alternatives : **1x20=20**

दिये गये विकल्पों में से सर्वाधिक उपयुक्त उत्तर चुनकर लिखें :

- (i) If $f(x) = \sin^{-1} x$, then domain of the function is :

यदि $f(x) = \sin^{-1} x$, तब फलन का प्रांत होगा :

(a) $x \geq 1$

(b) $-1 \leq x \leq 1$

(c) $x \geq 1$ or $x \leq -1$

(d) None of these.

- (ii) If $f(x) = \log x$, then which is incorrect ?

यदि $f(x) = \log x$, तब निम्नांकित में कौन असत्य है ?

(a) $f(x^m) = m f(x)$

(b) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

(c) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(d) $f(xy) = f(x) + f(y)$

(iii) The value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^\circ}{x}$ is :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^\circ}{x}$ का मान होगा :

- (a) $\frac{180}{\pi}$ (b) 180π
 (c) $\frac{\pi}{180}$ (d) None of these.

(iv) If $y = \log \sin x^2$, then $\frac{dy}{dx}$ is equal to :

यदि $y = \log \sin x^2$, तब $\frac{dy}{dx}$ का मान बराबर होगा :

- (a) $\sin x^2$ (b) $2x \cot x^2$
 (c) $\cot x^2$ (d) None of these.

(v) The value of $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ is equal to :

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ का मान बराबर होगा :

- (a) $\int_a^c f(x)dx$ (b) $\int_c^a f(x)dx$
 (c) $\int_0^b f(x)dx$ (d) None of these.

(vi) If $y = x^n$, then value of $D^n(x^n)$ is :

यदि $y = x^n$, तब $D^n(x^n)$ का मान होगा :

- (a) 0 (b) \underline{n}
 (c) $n\underline{n}$ (d) None of these.

(vii) If $u = \tan^{-1} \frac{y}{x}$, then $\frac{\partial u}{\partial x}$ is equal to :

यदि $u = \tan^{-1} \frac{y}{x}$, तब $\frac{\partial u}{\partial x}$ का मान होगा :

- (a) $\frac{-y}{x^2 + y^2}$ (b) $\frac{-x}{x^2 + y^2}$
 (c) 0 (d) None of these.

(viii) If $y = x \log x$, the value of x in order that $\frac{dy}{dx}$ may vanish is :

यदि $y = x \log x$, $\frac{dy}{dx}$ के शून्य होने के लिए x का मान है :

- (a) 1 (b) 0
 (c) $\frac{1}{e}$ (d) e.

(ix) The value of $\int_0^{\infty} e^{-y} dy$ is :

$\int_0^{\infty} e^{-y} dy$ का मान होगा :

- (a) 2 (b) 1
(c) 0 (d) None of these.

(x) The value of $\int \cos x^\circ \cdot dx$ is :

$\int \cos x^\circ \cdot dx$ का मान बराबर होगा :

- (a) $\frac{180}{\pi} \sin x^\circ$ (b) $\frac{1}{\pi} \sin x^\circ$
(c) $\frac{180^\circ}{\pi} \sin x^\circ + c$ (d) None of these.

(xi) If $y = (x-1)(x+2)$, then the value of x in order

that $\frac{dy}{dx}$ may vanish is :

यदि $y = (x-1)(x+2)$, तब $\frac{dy}{dx}$ का मान शून्य होने के

लिए x का मान होगा :

- (a) $x = \frac{1}{2}$ (b) $x = -\frac{1}{2}$
(c) $x = 0$ (d) None of these.

(xii) The value of $\frac{dy}{dx}$ at the point (1, 1) for the curve

$x^2 = y$ is :

वक्र $x^2 = y$ के बिन्दु (1, 1) पर $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा :

- (a) 3 (b) 2
(c) 0 (d) None of these.

(xiii) If $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$, then the angle between \vec{a} and \vec{b} is :

यदि $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$ और $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$, तब \vec{a} और \vec{b} के बीच का कोण होगा :

- (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$
(c) 0 (d) None of these.

(xiv) The value of $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k})$ is :

$\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k})$ का मान होगा :

- (a) 2 (b) 1
(c) 0 (d) None of these.

(xv) The order and degree of the differential equation

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 5y = mx \text{ is :}$$

अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 5y = mx$ की

कोटि और घात होगी :

- (a) 2 and 5 (b) 5 and 2
(c) 2 and 1 (d) None of these.

(xvi) The resultant of two equal forces p and p acting at an angle α is :

कोण α पर क्रियाशील दो बराबर बल p और p का परिणामी होगा :

- (a) $2p \cos \frac{\alpha}{2}$ (b) $2p \sin \frac{\alpha}{2}$
(c) $p \cos \alpha$ (d) $p \sin \alpha$

(xvii) The differential equation of the curve $y^2 = 4ax$ is :

वक्र $y^2 = 4ax$ का अवकल समीकरण होगा :

- (a) $2xy + \frac{dy}{dx} = 0$
(b) $2xy \frac{dy}{dx} = -y$

(c) $2xy \frac{dy}{dx} - y = 0$

(d) None of these.

(xviii) If the position of resultant of two like parallel forces P and Q remains unchanged when P and Q are interchanged then :

यदि दो सम समानान्तर बल P और Q के परिणामी का स्थान अपरिवर्तित रहता है और जब P तथा Q की परस्पर अदला-बदली की जाती है, तो :

- (a) $P = Q$ (b) $P = 2Q$
(c) $Q = 2P$ (d) None of these.

(xix) A ball kicked with a velocity u at an angle θ to the ground will strike the ground at a distance of :

एक गेंद u वेग से जमीन से θ कोण पर फेंकी जाती है, तो यह जमीन से टकराती है। इसकी दूरी होगी :

- (a) $\frac{u^2 \sin \theta}{g}$ (b) $\frac{u^2 \sin^2 \theta}{g}$
(c) $\frac{u^2 \sin 2\theta}{2g}$ (d) $\frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

(xx) Which of the following is an even function ?

निम्नांकित में से कौन सम फलन है ?

- (a) $\sin x$ (b) $\tan x$
(c) $\cos x$ (d) None of these.

GROUP-B

2. Answer **any five** questions : **4x5=20**

किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दें :

- (i) If (यदि) $y = \sin \sqrt{\cos \sqrt{\tan mx}}$ (तो) find $\frac{dy}{dx}$ (निकालें). **4**
- (ii) If (यदि) $y = \tan(x+y)$ (तो) find $\frac{dy}{dx}$ (निकालें). **4**
- (iii) If (यदि) $y = x^x + x^{1/x}$ (तो) find $\frac{dy}{dx}$ (निकालें). **4**
- (iv) Show that maximum value of $x + \frac{1}{x}$ is less than its minimum value. **4**
दिखाएँ कि $x + \frac{1}{x}$ का अधिकतम मान उनके न्यूनतम मान से कम है।
- (v) Integrate (समाकलन करें) : $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ **4**
- (vi) Integrate (समाकलन करें) $\int (5x+3)\sqrt{2x-1} \cdot dx$ **4**

(vii) Solve the following differential equation : **4**

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल करें :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^y.$$

(viii) Show that the vectors $\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$ and $3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ are linearly independent. **4**

दिखाएँ कि सदिश $\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$ और $3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ रैखिक स्वतंत्र हैं।

(ix) The resultant of two forces P and Q is equal to $\sqrt{3}Q$ and makes an angle of 30° with the direction of P. Show that P is either equal to or double of Q. **4**

P तथा Q बलों का परिणामी $\sqrt{3}Q$ है और P की दिशा से 30° कोण बनाता है। सिद्ध करें कि P बल Q के बराबर या दुगना है।

(x) A particle falling under gravity describes 80 ft. in a certain second. How long does it take to describe in next 112 ft ? **4**

गुरुत्वाधीन से गिरता हुआ एक कण किसी एक सेकण्ड में 80 फुट दूरी तय करता है। इसके बाद 112 फुट की दूरी तय करने में उसे कितना समय लगेगा ?

GROUP-C

Answer **any five** questions selecting at least one question from each part : **8x5=40**

प्रत्येक पार्ट से कम से कम एक प्रश्न चुनते हुए **किन्हीं पाँच** प्रश्नों के उत्तर दें।

(PART-I)

3. (a) Evaluate (मान निकालें) : $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta}{\theta}$ 4
- (b) If (यदि) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$, when (जब) $x \neq 2$
 $= p$ when (जब) $x = 2$
 and $f(x)$ is continuous at $x = 2$, find the value of p . 4
 और $x = 2$ पर $f(x)$ सतत है तब p का मान निकालें।
4. (a) Find the differential co-efficient of $\tan ax$ w.r.t. x from first principle. 4
 प्रथम सिद्धान्त से $\tan ax$ का अवकल गुणांक x के सापेक्ष निकालें।
- (b) If $y = c^{a \sin^{-1} x}$, prove that : 4
 $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)x.y_{n+1} - (n^2 + a^2)y_n = 0$

यदि $y = c^{a \sin^{-1} x}$ तो सिद्ध करें कि :

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)x.y_{n+1} - (n^2 + a^2)y_n = 0$$

5. (a) If $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x - y}\right)$, prove that : 4

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

यदि $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x - y}\right)$ तो सिद्ध करें कि :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

- (b) If the radius of a circle is increasing at a constant rate of 6 cm/sec, find the rate of increase of its area when the radius is 50 cm. 4
 यदि किसी वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी/से० की दर से बढ़ रही हो, तो उनके क्षेत्रफल की वृद्धि की दर मालूम करें, जबकि त्रिज्या 50 सेमी है।
6. (a) Find the area of the portion of the parabola $y^2 = 4x$ cut off by the line $y = x$. 4
 सरल रेखा $y = x$ द्वारा परवलय $y^2 = 4x$ से काटे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालें।

(b) Integrate (अवकलन करें) : $\int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \cdot dx$ 4

(PART-II)

7. (a) Prove that (साबित करें) : 4

$$\vec{i} \times (\vec{a} \times \vec{i}) + \vec{j} \times (\vec{a} \times \vec{j}) + \vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{k}) = 2\vec{a}$$

(b) If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ be three vectors such that $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ and $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, |\vec{c}| = 7$, find the angle between \vec{a} and \vec{b} . 4

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन सदिश हैं जिससे $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ और $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, |\vec{c}| = 7$, तब \vec{a} और \vec{b} के बीच का कोण निकालें।

8. (a) Prove that the necessary and sufficient condition for the three vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ to be coplanar is that $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. 4

सिद्ध करें कि तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के एकतलीय होने की आवश्यक और पर्याप्त शर्त है $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

(b) Find the area of the parallelogram whose diagonals are $3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ and $\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$. 4

उस समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालें जिसके विकर्ण

$$3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \text{ तथा } \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \text{ हैं।}$$

9. State and prove Varignon's theorem on moments. 8

वैरिगनन के आधुन साध्य के कथन को लिखकर साबित करें।

10. Three parallel forces P, Q, R act at the vertices of the triangle ABC. If their resultant passes through the circumcentre, show that : 8

$$\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$$

यदि त्रिभुज ABC के शीर्ष बिन्दुओं पर कार्य करने वाले सम समानान्तर

बल P, Q, R का परिणामी उसके परिकेन्द्र से गुजरे तो साबित करें कि:

$$\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$$

(PART-III)

11. Solve the following differential equations : **4x2=8**

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल करें :

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ **4**

(b) $\cos^2 x \cdot \frac{dy}{dx} + y = \tan x$ **4**

12. Solve the following differential equations : **4x2=8**

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल करें :

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x^2 + 2e^2x$ **4**

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + 4y - 3}$ **4**

(PART-IV)

13. A particle moves in a straight line with a uniform acceleration. If a , b and c are the distances described in the p^{th} , q^{th} and r^{th} seconds respectively, prove that :
 $a(q - r) + b(r - p) + c(p - q) = 0.$ **8**

समरूप वेगवर्द्धन से एक कण किसी सरल रेखा में गतिमान है। यदि वे p वें, q वें और r वें सेकेण्डों में तय की गयी दूरियाँ क्रमशः a , b और c हो, तो सिद्ध करें कि :

$$a(q - r) + b(r - p) + c(p - q) = 0$$

14. A body is projected at an angle α to the horizon, so as to clear two walls of equal height a , at a distance $2a$ from each other. Show that the range is $2a \cot \frac{1}{2}\alpha$. **8**
क्षितिज से α कोण पर एक वस्तु इस तरह फेंकी जाती है कि यह a ऊँचाई की दो दीवारों, जिनके बीच की दूरी $2a$ है, के ऊपर से गुजर जाती है। दिखाएँ कि परास $2a \cot \frac{1}{2}\alpha$ है।
